

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{6} = 2,4495$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$

21 novembre 2008

Gara a Squadre - Allenamento Disfida - Testi

1. Attraversamento fluviale. [20 punti]

Una spedizione naturalistica composta da 45 scienziati sta attraversando la regione del Paeschefu alla ricerca dell'introvabile Chissaselghè e si trova a dover attraversare un fiume. Hanno a disposizione un'imbarcazione in grado di trasportare 6 persone e il trasbordo di tutti i componenti della spedizione richiede 2 ore e mezza. La navigazione viene ostacolata dalla corrente del fiume che costringe l'imbarcazione a muoversi lungo una linea rettilinea obliqua rispetto alla riva del fiume con una velocità reale di $3,6 \frac{km}{h}$. La velocità con cui la barca viene portata verso valle è, invece, pari alla velocità della corrente ed è di $2 \frac{km}{h}$. Ogni volta che si torna sulla sponda di partenza, si deve quindi trasportare l'imbarcazione verso monte per raggiungere i componenti della spedizione che ancora devono attraversare. Quest'ultima operazione viene effettuata con una velocità doppia rispetto a quella del fiume. Al termine della lunga fatica il capo spedizione, dopo aver esaminato le carte topografiche, esclama: caspita ci siamo persi! Questo non è il fiume Tintirola, è troppo piccolo! Misura solo :!?!?!?!?!?! ma la sua ultima parola viene coperta dal terrificante urlo di Chissaselghè che, afferratolo, lo trascina verso la sua tana. Qual'è la larghezza, arrotondata ai metri, del fiume?

2. Alfa Centauri [20 punti]

Il sistema stellare di Alfa Centauri ha un numero impressionante di pianeti che gli orbitano attorno. Alcuni esperti di numerologia hanno osservato che tale numero è il più piccolo intero positivo che: diviso per 8 dia resto 1, diviso per 9 dia resto 2, diviso per 10 dia resto 3, diviso per 11 dia resto 4, diviso per 12 dia resto 5. Quanti sono i pianeti?

3. Chapasik [30 punti]

L'antichissimo popolo dei Chapasik conosceva la numerazione posizionale, ma con una base non superiore a nove. Di essi si sanno solo due cose, oltre al fatto che scrivevano i numeri come noi. La prima è che lo zero era tabù, per cui a questa cifra ne sostituivano un'altra (quindi confondendone due), e la seconda è che l'equazione $x^x = 2211$ ammette una soluzione intera. Qual è la base usata dai Chapasik?

4. Stagioni

[30 punti]

Mentre rigirava il suo tetraedro preferito Dio disse ad Adamo: «Ho deciso di darti la possibilità di riordinare le quattro stagioni nei quattro periodi (da T_0 a T_3) dell'anno. Puoi utilizzare a tuo piacere questi due pulsanti: il pulsante *ruota* ha l'effetto di ruotare ciclicamente tra loro le stagioni nei periodi T_1 , T_2 , T_3 (nel senso che la stagione in T_1 si muove in T_2 , quella in T_2 va in T_3 e quella in T_3 va in T_1), la stagione in T_0 resta ferma; il pulsante *scambia*, scambia tra loro la stagione nel periodo T_0 con quella in T_1 e simultaneamente la stagione nel periodo T_2 con quella in T_3 , un po' come sommare 1 in base 2 ma senza fare l'eventuale riporto.»

Quante diverse disposizioni può ottenere Adamo?

5. Messaggio da Alfa Centauri

[30 punti]

Alcuni astrologi, ansiosi di sapere in che anno ci sarà la fine del mondo, hanno interrogato i sapienti abitanti del sistema stellare di Alfa Centauri. Nel messaggio dei sapienti si spiega la seguente procedura:

Disporre i numeri da 1 a 1800 in una tabella rettangolare 50×36 , partendo dalla prima casella in alto a sinistra e disponendo i numeri in ordine crescente, muovendosi per righe e andando a capo quando si è raggiunta la fine della riga.

In un'altra tabella uguale, disporre gli stessi numeri partendo in alto a sinistra ma stavolta muovendosi per colonne, mettendoli sempre in ordine crescente e risalendo in cima alla colonna successiva quando si è arrivati in fondo.

Sovrapponendo le due tabelle, alcuni numeri occuperanno lo stesso posto in entrambe. Questi numeri magici, sommati tra loro, daranno la risposta cercata.

In che anno avverrà la fine del mondo, secondo i sapienti di Alfa Centauri?

6. Bocce

[40 punti]

Una confezione a forma di prisma quadrato $20 \times 20 \times 10$ contiene quattro bocce sferiche uguali di diametro 10. Che diametro massimo possono avere i due bocchini in modo da poter essere inseriti nella confezione senza doverla modificare?

Moltiplicare la soluzione per mille e arrotondare all'intero più vicino.

7. Partita a carte

[40 punti]

Alfio e Alfonso stanno facendo una partita a carte usando un mazzo di 52 carte più 2 jolly. In questo momento hanno in mano ciascuno 5 carte, e ognuno ha scartato in precedenza 6 carte (senza mai scartare jolly), cosicché sono rimaste nel mazzo ancora 32 carte. È il turno di Alfio di pescare una carta dal mazzo, lui non ha in mano jolly e non sa cosa abbia in mano il suo avversario. Qual è la probabilità che peschi un jolly? Scrivere il risultato nella forma $\frac{xy}{yz}$ dove xy è il numeratore e yz il denominatore della frazione (ridotta ai minimi termini) che rappresenta la probabilità cercata.

8. La scatola di cioccolatini**[40 punti]**

La scatola senza coperchio dei famosi cioccolatini austriaci Mozartkugeln (detti anche “Palle di Mozart”) ha la forma di un prisma retto di altezza 14cm con base un esagono regolare. Quando tale scatola viene “appiattita”, nel senso che le facce laterali vengono tagliate lungo gli spigoli verticali e aperte sul piano della faccia esagonale, si ottiene una figura che è inscritta in un cerchio di raggio 25cm.

Quanto misura, in millimetri, il lato della faccia inferiore esagonale? Si arrotondi il risultato per difetto all'intero più piccolo.

9. Comizi**[40 punti]**

Due politici di schieramenti opposti tengono simultaneamente un comizio nella stessa grande piazza ad una distanza di 15 metri uno dall'altro. Parlano con la stessa identica potenza di voce. Molti passanti decidono di seguire uno dei due comizi, ma per poter seguire il discorso devono essere abbastanza vicini ad uno dei due politici da avere l'altro a distanza almeno doppia. Alla fine si formano due gruppi di persone assiegate attorno a ciascun politico e non c'è spazio per altri interessati. Quant'è l'area calpestata dal pubblico?

10. Il conto**[40 punti]**

Pierino ha cambiato numero di conto corrente (sai com'è) e si è scordato il suo nuovo numero. O meglio, sa che la banca gli ha comunicato 2008 ma manca uno zero da qualche parte. La grana è che per ragioni di sicurezza la banca gli ha comunicato il numero del conto in una base incognita. Lui però sa che la differenza delle due possibilità che ha, convertita in base 10, è un numero fatto con due delle tre diverse cifre comunicategli. Infine si ricorda che il numero del conto, convertito in base 10, ha la forma $ggmaa$ e si può memorizzare come una data reale $gg/m/aa$. Qual è il numero di conto di Pierino? Indicare le quattro cifre più significative.

11. Programma bacato**[40 punti]**

Uno studente scrive un programma che calcola il prodotto di un numero naturale con i suoi 5 successori. Poi fa stampare i risultati dell'operazione applicata a ogni numero. Ad un certo punto si accorge che il computer stampa un numero dispari! Siccome sa che questo è impossibile, controlla il codice e si accorge che per un errore di programmazione il computer non stampa mai la cifra 0 (anche se la usa per fare i conti).

Qual è il più piccolo numero che ha dato per risultato un numero dispari?

12. Anni fausti**[50 punti]**

L'anno zero era *fausto*; l'anno uno era *infausto* (perché l'anno zero era fausto); gli anni 2 e 3 erano rispettivamente *infausto* (perché l'anno zero era fausto) e *fausto* (perché l'anno uno era *infausto*); in generale per ogni numero naturale k la sequenza dei primi 2^k anni si ripete per i successivi 2^k anni con *faustitudine* invertita. Quanti anni fausti ci sono stati in tutto dal 1001 al 2008 (estremi compresi)?

13. Il dado che raddoppia **[50 punti]**

In un gioco a premi giocato lanciando un dado a sei facce la regola è la seguente: se esce il numero 1 oppure 3 il montepremi raddoppia, se esce uno degli altri numeri il montepremi si dimezza. Considerando che il montepremi iniziale è di 512 euro, qual è la probabilità che dopo dieci lanci il montepremi sia tornato di nuovo al valore iniziale?

Indicare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione risultante ridotta ai minimi termini.

14. Quattro ellissi **[50 punti]**

Quattro ellissi uguali sono disposte in modo tale che gli otto fuochi siano vertici di un ottagono regolare di 10 metri di lato ed in modo da essere tangenti ciascuna ad altre due. Quanto misura l'area di un quadrato costruito sul loro diametro maggiore? Si approssimi all'intero più vicino.

15. Il prestigiatore **[50 punti]**

Per il suo numero il prestigiatore Boschin utilizza cinque sfere, di cui la più grande è cava e grande abbastanza da contenere tutte quattro le altre. Qual è il diametro minimo della sfera più grande sapendo che le altre quattro hanno tutte diametro 4000?

Arrotondare all'intero più vicino.

16. Ripetitori **[50 punti]**

Su una linea di trasmissione dati sono inseriti in serie un certo numero (inferiore a 1000) di ripetitori, tutti identici tra loro. Si scopre che, a causa di un gravissimo errore di progettazione, i ripetitori effettuano un ben preciso rimescolamento nell'ordine degli 8 bit di ogni byte in transito. Sapendo questo e pur non conoscendo il modo con cui i bit vengono permutati, un matematico afferma che la linea funzionerà perfettamente. Quanti sono i ripetitori?

17. I Tobleroni **[50 punti]**

La lunga catena Nord-Sud dei Tobleroni separa la città di Schokostadt da Cookieyork che si trovano ai piedi della catena sui due lati opposti ed esattamente a metà della sua lunghezza. La catena ha la forma di un prisma triangolare avente come base un triangolo isoscele con base e altezza di 2000 metri adagiato sulla faccia laterale larga 2000 metri. L'ingegnere capo deve realizzare una strada di collegamento di lunghezza minima, con il vincolo che la pendenza non può mai superare i 5 metri di quota ogni 100 metri di strada percorsa. Tuttavia l'ingegnere è incerto se realizzare una strada che scavalca i Tobleroni ricorrendo a numerosi tornanti, oppure optare per un percorso che aggiri la catena a Nord oppure a Sud. Quanto è lunga la catena in chilometri?

Nota: Le pareti verticali Nord e Sud sono del tutto impraticabili.

18. Accoglienza**[60 punti]**

La città di Zozo ha 2008 abitanti, alcuni sono *cavalieri* e dicono sempre la verità, gli altri mentono sempre (*furfanti*). Non appena entri in città vieni accolto dagli abitanti, che si allineano dal più giovane al più anziano dandosi la mano. Al primo e all'ultimo chiedi: «La persona a cui dai la mano è un cavaliere?»; a tutti gli altri chiedi: «Le due persone a cui dai la mano sono entrambe cavalieri?». In tutto ottieni un *si* e 2007 *no*. Quanti sono al massimo i cavalieri?

19. Origami**[60 punti]**

Su un foglio quadrettato con quadretti di lato 12 millimetri Arturo disegna un parallelogramma composto da sei mezzi-quadretti e avente altezza pari a un sesto della base. Lo ritaglia. Lo piega lungo le linee dei quadretti incollando i due lati obliqui opposti in modo da formare una specie di solido ad anello che completa incollando due triangoli equilateri sopra e sotto, ottenendo un solido con otto facce triangolari (due triangoli equilateri e sei triangoli rettangoli isosceli). Quant'è il volume del solido così ottenuto?

20. Stele di Violetta**[60 punti]**

La *stela di Violetta* risale all'antico popolo dei ettni, in essa è scolpito un quadrato con una sequenza di tre simboli accanto ad un lato: ♣♦♥ e una sequenza di cinque simboli all'interno: ♦♠△♣♠.

Di questo popolo si è scoperto che utilizzava una numerazione posizionale in base 7, con la particolarità che le cifre assumevano valori interi tra -3 e $+3$ anziché tra 0 e 6 (molto comodo per rappresentare anche numeri negativi senza bisogno di un segno meno!).

Quant'è l'area del quadrato?

21. Torre di Hanoi**[70 punti]**

Antonio ha costruito una *torre di Hanoi* con otto dischi (di misura diversa) e 4 pioli denominati A, B, C, D. Si diverte a disporre in vari modi i dischi nei 4 pioli dandosi le seguenti regole:

1. Non si può disporre un disco sopra uno più piccolo;
2. L'unico piolo che può restare vuoto è il "D";
3. I dischi più bassi dei vari pioli devono essere disposti in ordine decrescente.

In quanti modi diversi Antonio può disporre i dischi?

22. Piantagrane

[70 punti]

Il signor Xyzzy vuole piantare degli alberi di Grana e ha allo scopo acquistato l'asteroide Kk726, che ha forma e dimensione adatti allo scopo. Il manuale del perfetto pianta-grane dice che:

- Ogni pianta Grana deve essere circondata da esattamente sei piante Verce a una distanza di esattamente 2 metri;
- Ogni pianta Verce deve essere circondata da esattamente sei piante, di cui tre sono altre piante Verce, alternate con due piante Grane e una pianta Penta; ovvero, nell'ordine: Verce, Grana, Verce, Grana, Verce, Penta; la pianta Penta deve essere ad una distanza $r = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \approx 1,7$ metri, mentre le altre stanno a una distanza di 2 metri;
- Ogni pianta Penta deve essere circondata da esattamente cinque piante Verce, a distanza r metri.

Quante piante acquisterà in tutto il signor Xyzzy?

23. I tasselli

[70 punti]

Il gioco dei tasselli consiste nel disporre a turno e senza sovrapposizioni su una scacchiera 4×4 dei tasselli a forma di L che coprono esattamente tre caselle della scacchiera. Il giocatore che al suo turno non ha possibilità di collocare il suo tassello perde. Il perdente paga al vincente una fiches per ogni casella che alla fine della partita risulta coperta dai tasselli, tenendo conto che le quattro caselle centrali valgono doppio. Sapendo che entrambi i giocatori giocano al meglio, quante fiches guadagna il vincente?

24. Costellazioni

[80 punti]

Mentre rigirava il suo dodecaedro preferito Dio disse ad Adamo: «Ho deciso di darti la possibilità di riordinare le dodici costellazioni che vedi in cielo, posizionate nei settori da S_0 a S_{11} . Puoi utilizzare a tuo piacere questi due pulsanti: il pulsante *ruota* ha l'effetto di ruotare ciclicamente tra loro le costellazioni nei settori da S_1 a S_5 e simultaneamente quelle nei settori da S_6 a S_{10} (nel senso che la costellazione in S_1 si muove in S_2 , quella in S_2 va in S_3 , ..., quella in S_5 va in S_1 e analogamente per i settori da S_6 a S_{10}), le costellazioni in S_0 e in S_{11} restano ferme; il pulsante *scambia*, scambia tra loro la costellazione in S_0 con quella in S_2 , quella in S_1 con quella in S_3 , quella in S_4 con quella in S_6 e così via, un po' come sommare 2 in base 2 ma senza fare l'eventuale riporto.»

Quante diverse disposizioni può ottenere Adamo?
